ISBN: 978-602-74598-3-0 Prosiding Seminar Nasional Fisika 5.0 (2019) (288-292)

Validasi gerakan permukaan air laut dengan pendekatan beda hingga tiga titik

Adi Jufriansah*[1,4], Arief Hermanto[2], Moh. Toifur[1], Erwin Prasetyo[3,4]

[1]Magister Physics Education Dept., Ahmad Dahlan University, Yogyakarta Indonesia
[2]Physics Dept., Gadjah Mada University, Yogyakarta Indonesia
[3]Science Education Dept. , Surabaya State University, Surabaya, Indonesia
[4]Phyics Education Dept. IKIP Muhammadiyah Maumere, Maumere Indonesia
*email: saompu@gmail.com

ABSTRAK

Gelombang merupakan fenomena fisika yang sering dijadikan sebagai studi rekayasa dan melibatkan model matematika. Model matematika yang digunakan dalam penelitian ini adalah bentuk PDP hiperbolik dua dimensi yang diselesaikan secara numerik dengan metode beda hingga tiga titik. Hasil penelitian menunjukkan bahwa dengan melibatkan kondisi awal dan kondisi batas maka diperoleh nilai kestabilan $r \leq 1$. Dalam ruang penjalaran, gelombang simulasi bergerak dan berubah sesuai perubahan waktu dan memiliki amplitudo yang sama. Hal ini sesuai dengan sifat gelombang satu sumber yang menjalar pada bidang dua dimensi seperti gerakan permukaan air laut.

Kata kunci : Gelombang Dua Dimensi, Model Matematika, Pendekatan Beda Hingga, Persamaan Diferensial Parsial, Skema Hiperbolik

1. Pendahuluan

Gelombang air laut terjadi ketika ada gerakan massa secara horizontal dan vertikal. Pengaruh ini disebabkan oleh resultan gaya yang bekerja (Brown et al., 1989) sehingga secara kontinu mampu mencapai kesetimbangan. Fenomena pergerakan air laut dapat diformulasikan dengan pendekatan model matematis menggunakan Persamaan Diferensial Parsial (PDP) (Brian and Friendly, 2006; Chung, 1994). Secara teoritis dan aplikasi, pembahasan PDP terus berkembang, dari masalah sains dan teknik yang melibatkan model matematika (Feng et all, 2018). Salah satu pemanfaatan PDP adalah bidang ilmu fisika (Sokolov, 2002; Zaslasky and Chaos, 2002) yang dapat diselesaikan dengan solusi analitik dan numerik dimana parameter nilai berubah terhadap waktu dan jarak (Martin et all, 2017; Jin et all, 2015; Li and Xu, 2010; Metzler and J. Klafter, 2000). Pada kasus khusus seperti gelombang berjalan di permukaan laut, hanya mengakui integrasi numerik (Samarskii, 2001). Salah satumetode yang digunakan adalah metode beda hingga (FDM). Hal ini dikarenakanmetode FDM memiliki bentuk yang sederhana, fleksibilitas (Yee, 1966; Mori and Romao, 2015). Untuk membangun solusi numerik, perkiraan perbedaan yang diperoleh dengan diskritisasi yang tepat dari kondisi awal dan kondisi batas sehingga memberikan solusi hampiran gerakan massa (Gerdt and Robertz, 2019).

Domain suatu fungsi dipartisi untuk memperoleh sejumlah titik dan hasil aproksimasi menunjukan turunan dari ekspansi deret Taylor di satu atau lebih titik partisi (Mathews et all, 1992). Diskretisasi yang wajar harus memberikan konvergensi solusi numerik dalam batas saat kondisi awal cenderung nol. Kecuali pada batasan tertentu sehingga, konvergensi tidak dapat dibangun secara langsung. Konsistensi dan stabilitas dianalisis sebagai kondisi yang diperlukan untuk konvergensi sedangkan konsistensi menandakan bahwa ketika jarak grid cenderung nol dan stabilitas memberikan batasan kesalahan dalam data numerik dengan solusi gangguan yang relatif kecil. Berdasarkan hal tersebut, tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengetahui solusi numerik dari persamaan gelombang dua dimensi menggunakan pendekatan beda hingga tiga titik sebagai validasi pergerakan air laut dengan kondisi awal dan kondisi batas yang diberikan.

2. Metode

Penelitian ini bersifat teoritik dan komputasi. Secara teoritik penelitian ini dilakukan dengan studi literatur terkait persamaan gelombang mengenai solusi analitik persamaan gelombang dimensi dua.Sedangkan secara komputasi dilakukan koding dengan bahasa pemrograman Matlab yang membutuhkan PC. Langkah-langkah yang dilakukan adalah menentukan kondisi batas dan kondisi awal sistem. Tahap pertama adalah menentukan parameter yang digunakan untuk penyelesaian persamaan gelombang secara analitik mengenai gelombang dua dimensi. Tahap kedua adalah menentukan kondisi batas dengan,

$$u(0,y,t)=0; u(2,y,t)=0; u(x,0,t)=0; u(x,2,t)=0$$

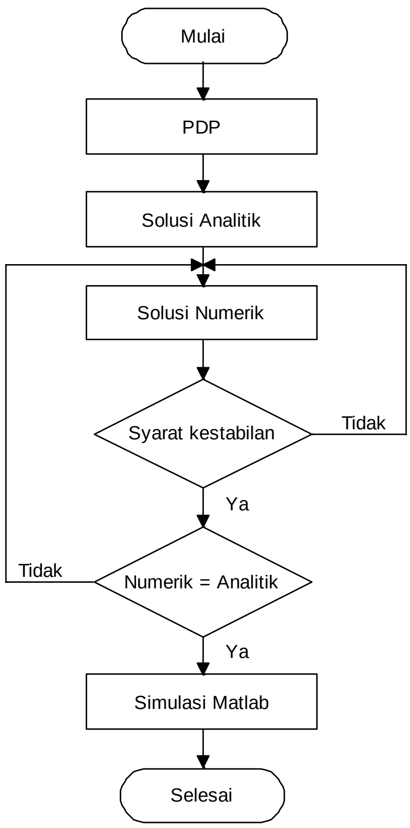
sedangkan kondisi awal diberikan sebagai berikut

$$u(x,y,0)=0{,}1\sin(\pi x)\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right); \frac{\partial u(x,y,0)}{\partial t}=0.$$

Dengan selang $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2,\ 0\le t\le 2.$ Pada penyelesaian secara numerik diberikan parameter nilai sebagai penjelas sistem. Parameter-parameter yang digunakan adalah sebagai berikut

$$c^2=0{,}25; B=[0\ 2\ 0\ 2]; T=2; m_x=40;$$
$$m_y=40; n=40.$$

Tahap ketiga adalah menentukan syarat kestabilan sistem. Secara lengkap dapat dilihat pada gambar 1.



Gambar 1. Diagram alir penelitian

a. Solusi analitik persamaan gelombang 2 dimensi

Persamaan gelombang dua dimensi disajikan pada persamaan (1). dalam bentuk PDP sebagai berikut

3. Hasil dan pembahasan

$$\left(\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t^2}$$

(1)

Persamaan (1) dapat diselesaikan dengan pemisalan *u*(*x,y,t*)=*X*(*x*)*Y*(*y*)*T*(*t*) sedangkan untuk menjelaskan perilaku sistem yang ditampilakan sebagai persamaan (2), persamaan (3) dan persamaan (4).

$$T(t) = A_1 \sin kct + A_2 \cos kct \quad (2)$$

Persamaan (2) merupakan solusi ruas kiri sedangkan untuk menghasilkan solusi ruas kanan dengan melakukan prosedur yang sama diperoleh

$$X(x) = B_1 \sin kx + B_2 \cos kx \quad (3)$$

dan

$$Y(y) = C_1 \sin ky + C_2 \cos ky \quad (4)$$

Maka solusi umum persamaaan adalah,

$$u(x,y,t) = (A_1 \sin kct + A_2 \cos kct)(B_1 \sin kx + B_2 \cos kx)(C_1 \sin ky + C_2 \cos ky) \quad (5)$$

Jika permasamaan (5) diberikan syarat batas yang berlaku untuk sepanjang *L* yang ujung ujungnya tetap dengan kondisi *u* = (0,0,*t*) = *u*(*L*,*M*,*t*) = 0 dan memiliki syarat awal dalam keadaan diam *du/dt* = 0 menyebabkan

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

sehingga, solusi umum sistem adalah

$$u(x,y,t)_n = C \sin\frac{n\pi}{L} x \sin\frac{n\pi}{L} y \cos\frac{n\pi c}{L} t \quad (6)$$

b. Solusi numerik gelombang 2 dimensi

Pendekatan beda hingga tiga titik diperoleh dari persamaan,

$$\left(\frac{u_{t,j+1}^{k} - 2u_{t,j}^{k} + u_{t,j-1}^{k}}{\Delta x^2} + \frac{u_{t+1,j}^{k} - 2u_{t,j}^{k} + u_{t-1,j}^{k}}{\Delta y^2} \right) = \frac{1}{c^2} \frac{u_{t,j}^{k+1} - 2u_{t,j}^{k} + u_{t,j}^{k-1}}{\Delta t^2} \quad (7)$$

dengan

$$\Delta x = \frac{x_f}{m_x},\ \Delta y = \frac{y_f}{m_y},\ \Delta t = \frac{T}{n}$$

Sehingga dari persamaan (7) dengan manipulasi aljabar, formula iterasi diperoleh seperti persamaan (8)

$$u_{t,j+1}^{k+1} = r_x \left(u_{t,j+1}^{k} + u_{t,j-1}^{k} \right) + 2\left(1 - r_x - r_y\right) u_{t,j}^{k} + r_y \left(u_{t+1}^{k} + u_{t-1,j}^{k} \right) - u_{t,j}^{k-1} \quad (8)$$

dengan

$$r_x = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta x^2},\ r_y = c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2}$$

Persamaan (8) hanya berlaku untuk *k*>0 pada saat awal di mana *k*=0, maka terdapat suku dengan indeks waktu = -1. Suku terakhir pada formula iterasi persamaan (8)

$$\frac{u_{t,j}^{1} - u_{t,j}^{-1}}{2\Delta t} = i_0^{'}\left(x_j, y_t\right) \quad (9)$$

Jika persamaan (8) diberi nilai *k*=0 maka formula iterasi diperoleh sebagai berikut

$$u_t^1 = \frac{1}{2} \left(r_x \left(u_{t,j+1}^{0} + u_{t,j-1}^{0} \right) + r_y \left(u_{t+1,j}^{0} + u_{t-1,j}^{0} \right) + 2\left(1 - r_x - r_y\right) u_{t,j}^{0} + i_0^{'}\left(x_j, y_t\right)\Delta t \right) \quad (10)$$

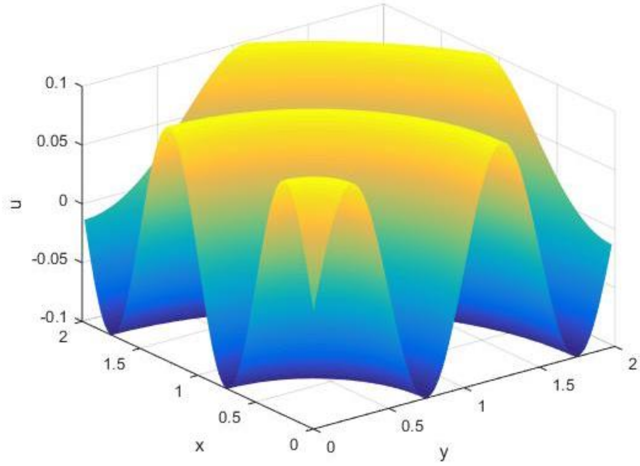
dari persamaan (10) diperoleh syarat kestabilan sistem adalah

$$r = \frac{4c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \le 1 \quad (11)$$

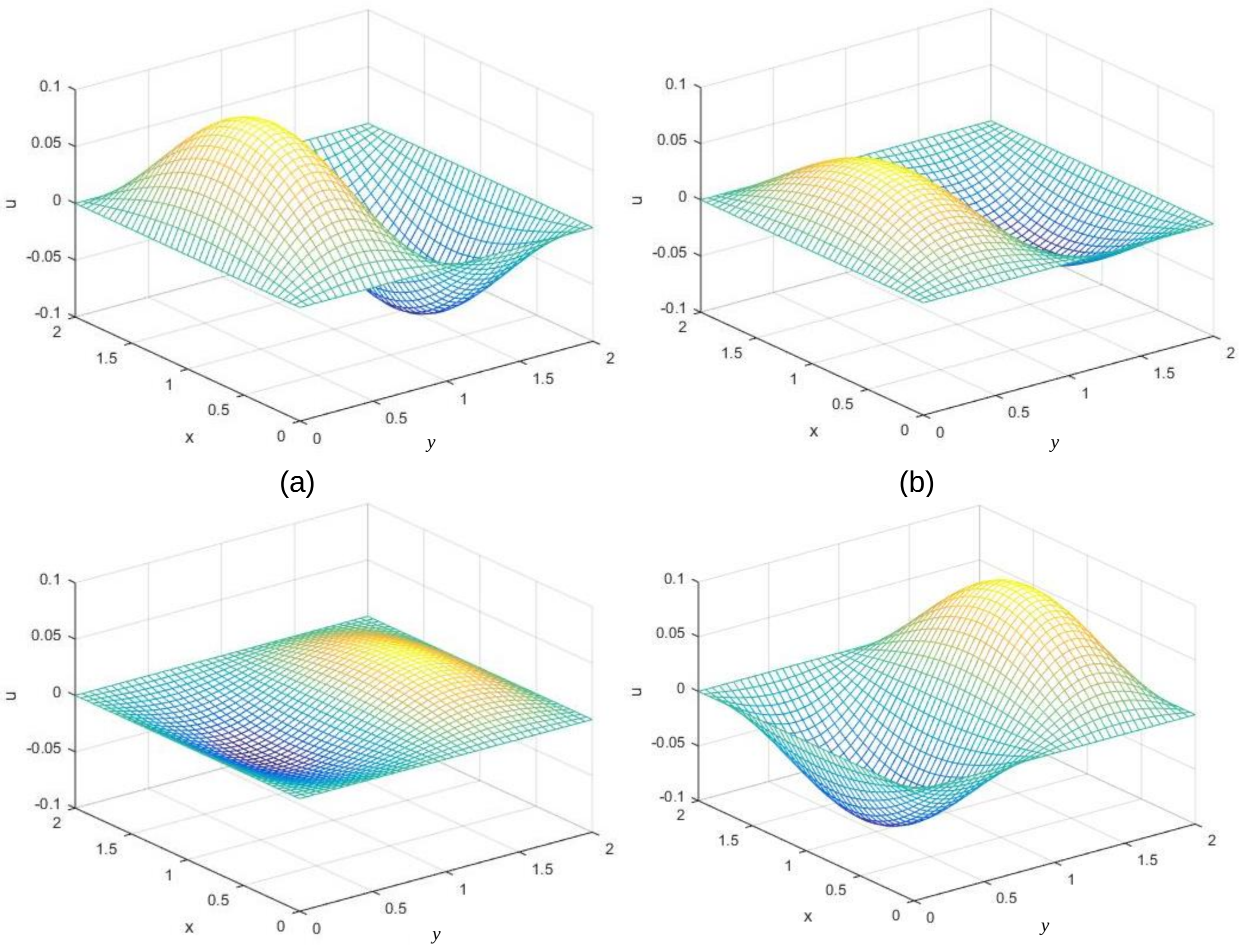
Program mendefinisikan PDP sebagai berikut

$$\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{0,25} \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial t^2} \quad (12)$$

Hasil perhitungan dari program diperoleh seperti pada gambar 3. Sedangkan gambar 2 adalah hasil interpretasi solusi analitik gelombang dengan amplitudo 0,1 dengan selang waktu $0 < t < 2$.



Gambar 2. Solusi analitikpada selang $0 < t < 2$



Gambar 3. Solusi numerik pada (a). *t* = 0, (b). *t* = 0.5, (c). *t* = 1, dan (d). *t* = 2

4. Simpulan

Berdasarkan hasil penelitian ini dapat disimpulkan bahwa dengan melibatkan kondisi awal dan kondisi batas maka diperoleh nilai kestabilan $r \leq 1$. Dalam ruang penjalaran, gelombang simulasi bergerak dan berubah sesuai perubahan waktu dan memiliki amplitudo yang sama. Hal ini sesuai dengan sifat gelombang satu sumber yang menjalar pada bidang dua dimensi seperti gerakan permukaan air laut.

Daftar pustaka

Brian, Bready and A Friendly. 2006. *Introduction to Numerical Analysis*. New Jersey: Pearson Education.

Brown et al. 1989. *Ocean Circulation*. New York. Pergamon Press.

Chung, L. 1994. *Applied Numerical Methods For Partial Differential Equations*. Singapore: Prentice Hall.

Feng, L., *et al*. 2018. Unstructured mesh finite difference/finite element method for the 2D time-space Riesz fractional diffusion equation on irregular convex domains, *Applied Mathematical Modelling*, doi: 10.1016/j.apm.2018.01.044.

Gerdt, V. P and D. Robertz. 2019. Algorithmic approach to strong consistency analysis of finite difference approximations to PDE systems. *In Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Beijing, China, July 15-18, 2019 (ISSAC '19), 8 pages. https://doi.org/.

Jin, B., *et al*. 2015. Error analysis of semidiscrete finite elementmethods for inhomogeneous time-fractional diffusion, *IMA J. Numer*. Anal., 35, pp. 561–582, https://doi.org/10.1093/imanum/dru018.

Li, X. and C. Xu. 2010. Existence and uniqueness of the weak solution of the space-time fractional diffusion equation and a spectral method approximation, *Commun. Comput. Phys*., 8,pp. 1016–1051, https://doi.org/10.4208/cicp.020709.221209a.

Martin, S., *et al.* 2017. Error Analysis of A Finite Difference Method OnGraded Meshes For A Time-Fractional DiffusionEquation. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, Vol. 55, No. 2, pp. 1057–1079, https://doi.org/10.1137/16M1082329

Mathews, John H., and K.D. Fink. 1992. *Numerical Methods for Computer Science, Engineering, and Mathematics. Edisi ke-2*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs.

Metzler, R., and J. Klafter. 2000. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach, *Phys. Rep*., 339, pp. 1–77, https://doi.org/10.1016/S0370-1573(00)00070-3.

Mori, C. N. T. and E. C. Romão. 2015. Numerical Simulation by Finite Difference Method of 2D Convection-Diffusion in *Cylindrical Coordinates. Appl. Math. Sci*., vol. 9, no. 123.

Rinaldi, Munir. 2003. *Metode Numerik*, Bandung: Buku Teks Ilmu Komputer Informatika.

Samarskii, A. A. 2001. *Theory of Difference Schemes.* Marcel Dekker: New York.

Sokolov, I. M., *et al.* 2002 Fractional kinetics, *Phys. Today* 55, 48-54.

Yee, K. 1966. Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations in isotropic media',*Trans. Antennas Propag*, 14, (3), pp. 302–307.

Zaslavsky, G.M., and Chaos. 2002. fractional kinetics, and anomalous transport, *Phys. Rep*. 371, 461-580.